Soluție

1.a) $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = A + I_2$.

b) $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.Din $A \cdot X = X \cdot A$, rezultă $b = c, d = a - b$ deci $X = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a-b \end{pmatrix}$.

Dacă $\det(X) = 0 \Rightarrow a^2 - ab - b^2 = 0$.Dacă $b = 0 \Rightarrow a = 0 \Rightarrow X = 0_2$,contradicție.Dacă $b \neq 0$,împărțind prin $b \Rightarrow t^2 - t - 1 = 0, t = \dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, fals.Deci $\det X \neq 0$, adică X este inversabilă.

c) $F_2 = 1$. Demonstrăm prin inducție.Verificare. $n = 1; A = \begin{pmatrix} F_2 & F_1 \\ F_1 & F_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Presupunem adevărată pentru n şi demonstrăm pentru $n+1$. $A^{n+1} = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n+2} & F_{n+1} \\ F_{n+1} & F_n \end{pmatrix}$.

2.a) $\sigma \cdot \pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}, \pi \cdot \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$. Cum aceste permutări nu comută, rezultă concluzia.

b) Prin calcul direct se obține că ord(π)=3 .Deci $H = \{e, \pi, \pi^2\}$.

c) Fie $\pi^i, \pi^j \in H \Rightarrow \pi^{i+j} \in H$ .Cum H este finită , rezultă H este subgrup al lui S_5.